

## 范例 2-003

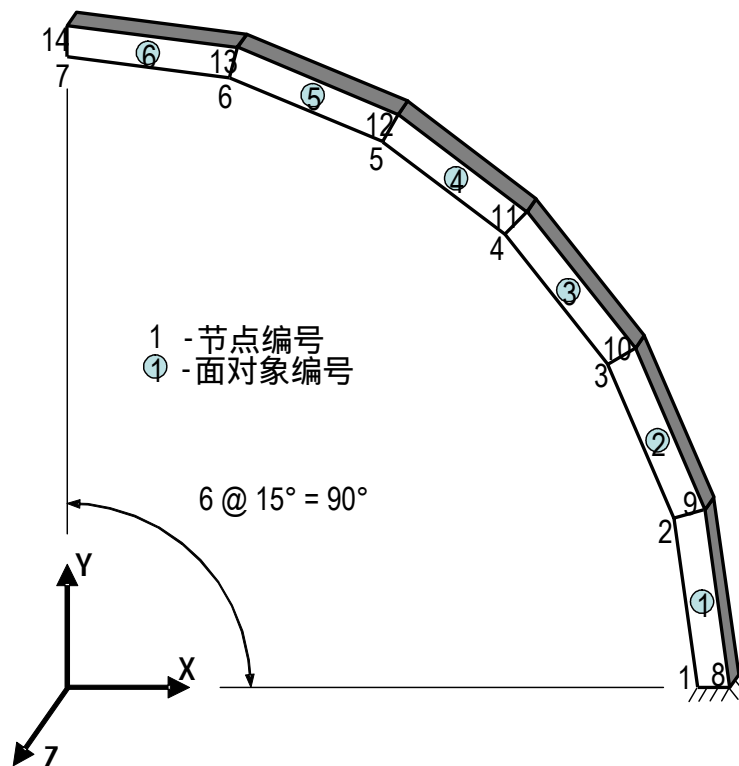
### 壳 - 承受静荷载的曲梁

#### 问题描述

此例中，一个用壳单元模拟的悬臂梁，承受在端部的面内和面外方向的单位力，分别在 Y 和 Z 方向。面内和面外的荷载在不同的工况中施加。端部在荷载方向的位移和手算结果进行了比较。

使用 MacNeal and Harder 1985 中的几何，属性和荷载。悬臂梁被弯曲成  $90^\circ$  的拱。其内半径为 4.12 in，外半径为 4.32 in。这样其为 0.2 in 宽且在在中线约 6.63 in 长。梁在 Y 方向为 0.1 in 厚。对于 SAP2000 中的建模，弯曲的梁被剖分至 6 个面对象，每个对应  $15^\circ$  的圆弧。

#### GEOMETRY AND PROPERTIES



#### 几何属性

内径 = 4.12 in  
外径 = 4.32 in  
弧度 =  $90^\circ$

#### 材料属性

$E = 10,000,000 \text{ lb/in}$   
 $\nu = 0.25$   
 $G = 4,000,000 \text{ lb/in}$

#### 截面属性

厚度 = 0.1 in

## 荷载

下表定义了施加于模型的面内和面外的荷载。

荷载工况	荷载
面内	$F_y = +0.5 \text{ lb}$ 在节点 7 和 14
面外	$F_z = +0.5 \text{ lb}$ 在节点 7 和 14

## 所测试的 SAP2000 技术特性

- 使用壳单元进行膜分析
- 使用壳单元进行板弯曲分析
- 节点力荷载

## 结果比较

SAP2000 结果对于薄板和厚板分别列出。手算解使用 Cook 和 Young 1985 第 244 页描述的方法。另外，使用 Roark 和 Young 1975 第 290 页的表 20 里面的第 4 项计算扭转刚度  $J$ 。手算解还在 MacNeal 和 Harder 1985 中发表。

## 薄板选项

模型和剖分	荷载工况和类型	输出参数	SAP2000	手算解	差异百分比
模型 A-薄板 6x1 剖分	荷载工况 IN 面内	$U_y$ , in 节点 7 和 14 的平均 值	0.0773	0.0886	-13%
	荷载工况 OUT 面外	$U_z$ , in 节点 7 和 14 的平均 值	0.4535	0.5004	-9%

## 厚板选项

模型和剖分	荷载工况和类型	输出参数	SAP2000	手算解	差异百分比
模型 A-厚板 6x1 剖分 h	荷载工况 IN 面内	$U_y$ , in 节点 7 和 14 的平均 值	0.0773	0.0886	-13%
	荷载工况 OUT 面外	$U_z$ , in 节点 7 和 14 的平均 值	0.4298	0.5004	-14%

数据文件: Example 2-003a-thick, Example 2-003a-thin,  
Example 2-003b-thick, Example 2-003b-thin,  
Example 2-003c-thick, Example 2-003c-thin,  
Example 2-003d-thick, Example 2-003d-thin

## 面内加载讨论

薄板选项和厚板选项对于面内行为基本上有相同的形式，因此对于荷载工况 IN 产生基本相同的结果。在本节的讨论适用于薄板和厚板选项。

使 SAP2000 结果和手算解不同的两个原因为剖分的尺寸和模型的几何是否符合圆弧。

来解释这些效果，建立了模型模型 B，C 和 D。模型 B 有 90x1 的剖分，且模型 C 有 90x3 的剖分，其大约为方形的单元（1:1 的方面比）。模型 D 使用模型 A 的 6x1 剖分，并将 6 个对象的每一个剖分为 15x3 的子对象。这样，模型 D 有 90x3 的剖分，但其只近似圆弧准确至 6x1 剖分。模型 A 和模型 D 有一个点位于圆弧上没 15 度的位置。模型 B 和 C 有一个点位于圆弧上每 1 度的位置。

下表显示了面内和面外的薄板和厚板选项的结果。

## 薄板和厚板选项

模型和剖分	荷载工况和类型	输出参数	SAP2000	手算解	差异百分比
模型 A 6x1 剖分	荷载工况 IN 面内	U <sub>y</sub> , in 在节点 7 和 14 的平均 值	0.0773	0.0886	-13%
模型 B 90x1 剖分			0.0845		-5%
模型 C 90x3 剖分			0.0884		0%
模型 D 6x1 剖分, 6 个对 象每个被子剖分 至 15x3			0.0893		+1%

比较, 模型 B 和模型 C 与模型 A 显示了进一步的剖分模型和使模型更好的近似一个圆弧, 改善了结果并使结果收敛至理论解。注意在模型 B 和 C 中的剖分不仅改善了单元的方面比, 其减少了单元从长方形的扭曲。

将模型 D 和模型 A 比较, 显示了剖分改善了结果比较。比较模型 C 和模型 D 显示了进一步的剖分需要沿着圆弧来收敛至理论解。

## 薄板的面外加载讨论

薄板选项和厚板选项对于面外行为有不同的形式, 并对工况 OUT 产生不同的结果。在此节的讨论特别适用与薄板选项。此节多数的, 但不是全部的讨论也适用于厚板选项。

面外的结果和手算解的差异约为 9%。产生此差异的主要原因在于程序使用的壳理论和手算解使用的梁理论。

PROGRAM NAME:	SAP2000
REVISION NO.:	0

在手算中使用的扭转刚度  $J$ , 来自 Roark and Young 1975 中第 290 页表 20 中的第 4 项。 $J$  值为  $0.000045776 \text{ in}^4$ , 等于  $0.22888bd^3$ 。在 SAP2000 中的壳单元假定壳的厚度和整个壳剖分相比很小。这样, 等效的壳理论的  $J$  为  $bd^3/3$ 。手算的  $J$  除以壳理论的  $J$  为 0.68664。

最初的手算位移为  $s$ :

$$0.35414 + 0.00010 + 0.14619 = 0.5004 \text{ in}$$

其中第一个分量从面外弯曲变形而来, 第二个分量从面外剪切变形而来, 且第三个分量从扭转变形而来。若将扭转分量乘以 0.68664, 来考虑壳和梁理论的不同, 其变为  $0.68664 * 0.14619 = 0.10038 \text{ in}$ , 且总位移为 0.4546 in。

0.4546 in 和程序的结果比较得很好, 但不完全一样。不完全一样得原因在于, 在程序中使用的端部约束不能准确地符合在手算解中得假定。

### 厚板选项得面外加载讨论

薄板选项和厚板选项对于面外行为有不同的形式, 因此对于荷载工况 OUT 产生不同的结果。在本节的讨论只适用于厚板选项。

面外的结果和手算解的差异约为 14%。产生此差异的主要原因在于程序使用的壳理论和手算解使用的梁理论。另一原因为壳的剖分。

在手算中使用的扭转刚度  $J$ , 来自 Roark and Young 1975 中第 290 页表 20 中的第 4 项。 $J$  值为  $0.000045776 \text{ in}^4$ , 等于  $0.22888bd^3$ 。在 SAP2000 中的壳单元假定壳的厚度和整个壳剖分相比很小。这样, 等效的壳理论的  $J$  为  $bd^3/3$ 。手算的  $J$  除以壳理论的  $J$  为 0.68664。

最初的手算位移为  $s$ :

$$0.35414 + 0.00010 + 0.14619 = 0.5004 \text{ in}$$

其中第一个分量从面外弯曲变形而来, 第二个分量从面外剪切变形而来, 且第三个分量从扭转变形而来。若将扭转分量乘以 0.68664, 来考虑壳和梁理论的不同, 其变为  $0.68664 * 0.14619 = 0.10038 \text{ in}$ , 且总位移为 0.4546 in。

0.4546 in 和程序的结果 0.4298 in 相比约有 5% 的不同。

下表列出了模型 A, B, C 和 D 的面外位移。注意当剖分增加时, 位移结果为 0.4546 in。 注意手算解栏显示了手算值, 括号内的值使用了  $J = bd^3/3$ 。类似的, 差异百分比栏内括号内值使用的是  $J = bd^3/3$ 。

## 厚板选项

模型和剖分	荷载工况和类型	输出参数	SAP2000	手算解	差异百分比
模型 A 6x1 剖分	荷载工况 OUT 面外	$U_z$ , in 节点 7 和 14 的平均 值	0.4298	0.5004 (0.4546)	-14% (-5%)
模型 B 90x1 剖分			0.4566		-9% (0%)
模型 C 90x3 剖分			0.4558		-9% (0%)
模型 D 6x1 剖分, 6 个 对象每个被子 剖分至 15x3			0.4570		-9% (+1%)

结果没有准确的收敛至 0.4546 in, 因为在程序模型中使用的端部约束不能准确的符合在手算解中的假定。

## 结论

只要剖分充分, SAP2000 面内加载的结果和手算解的比较是可以接受的。

对于薄板选项, SAP2000 对于面外加载的结果和手算解有些差异。这因为 SAP2000 的结果是基于壳理论, 且手算结果是基于梁理论。壳理论假定壳单元的厚度相比所有壳单元的尺寸是较小的, 因此扭转刚度  $J$  为  $bd^3/3$ 。  $J$  不同是结果不同的原因。

## Software Verification

---

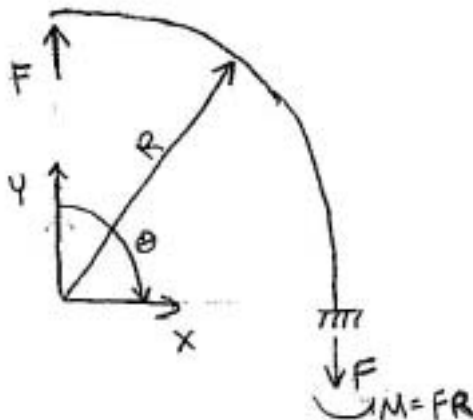
PROGRAM NAME: SAP2000  
REVISION NO.: 0

只要剖分充分，SAP2000 对于厚板选项的面外加载的结果，和对于薄板选项的结果是相似的。

注意，在此例中剖分可改善单元的方面比，且和减少单元相比长方形的几何扭曲。

手算过程

In-Plane Force



$$S = \text{beam length} = R\theta$$

$$ds = R d\theta$$

$$M(\theta) = RF \cos \theta$$

$$V(\theta) = F \cos \theta$$

$$R = 4.22 \text{ in (centerline)}$$

$$F = 1 \text{ lb}$$

$$\Delta_y = \int_0^L \frac{mM}{EI} ds + \int_0^L \frac{vV}{GA_v} ds + \int_0^L \frac{pP}{EA} ds$$

$$\Delta_y = \int_0^{\pi/2} \frac{R^3 F}{EI} \sin^2 \theta d\theta + \int_0^{\pi/2} \frac{RF}{GA_v} \cos^2 \theta d\theta + \int_0^{\pi/2} \frac{RF}{EA} \sin^2 \theta d\theta$$

$$\text{Noting that } \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\Delta_y = \frac{\pi R^3 F}{4EI} + \frac{\pi RF}{4GA_v} + \frac{\pi RF}{4EA}$$

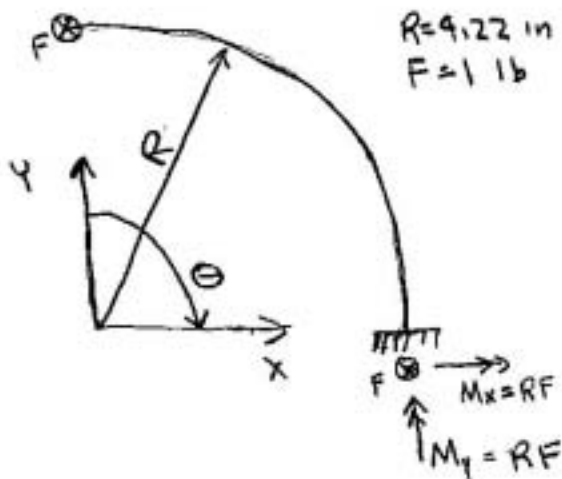
$$\Delta_y = \frac{\pi \times 4.22^3 \times 1}{4 \times 10,000,000 \times \left(\frac{0.1 \times 0.2^3}{12}\right)} + \frac{\pi \times 4.22 \times 1}{4 \times 4,000,000 \times \left(\frac{2}{6} \times 0.2 \times 0.1\right)} + \frac{\pi \times 4.22 \times 1}{4 \times 10,000,000 \times 0.2 \times 0.1}$$

$$\Delta_y = 0.088535 + 0.000050 + 0.000017$$

$$\Delta_y = 0.08860 \text{ in}$$



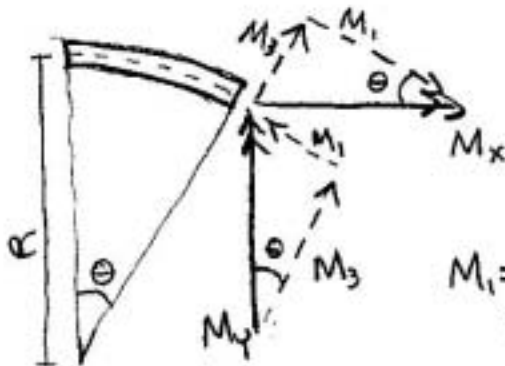
Out - of - Plane Force



$S = \text{beam length} = R\theta$   
 $ds = R d\theta$

$M_x(\theta) = RF - RF \cos \theta$

$M_y(\theta) = RF \sin \theta$



$M_1 = \text{moment about local 1 axis} = \text{torsion}$

$M_3 = \text{moment about local 3 axis}$

$$\begin{aligned} M_1 &= M_x \cos \theta - M_y \sin \theta \\ &= RF \cos \theta - RF \cos^2 \theta - RF \sin^2 \theta \\ &= RF \cos \theta - RF (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \end{aligned}$$

$$M_1 = RF \cos \theta - RF$$

$$M_3 = M_x \sin \theta + M_y \cos \theta$$

$$= RF \sin \theta - RF \cos \theta \sin \theta + RF \cos \theta \sin \theta$$

$$M_3 = RF \sin \theta$$

$$\Delta z = \int_0^L \frac{mM}{EI} ds + \int_0^L \frac{vV}{GA_v} ds + \int_0^L \frac{tT}{GJ} ds$$

$$\Delta z = \int_0^{\pi/2} \frac{R^3 F}{EI} \sin^2 \theta d\theta + \int_0^{\pi/2} \frac{R}{GA_v} d\theta + \int_0^{\pi/2} \frac{R^3 F}{GJ} (\cos^2 \theta - 2\cos \theta + 1) d\theta$$

Note:  $\int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{4}$

Note:  $\int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta = \sin \theta \Big|_0^{\pi/2} = 1$

$$\Delta z = \frac{\pi R^3 F}{4EI} + \frac{\pi R}{2GA_v} + \frac{R^3 F}{GJ} \left( \frac{\pi}{4} - 2 + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\Delta z = \frac{\pi R^3 F}{4EI} + \frac{\pi R}{2GA_v} + \left( \frac{3\pi}{4} - 2 \right) \frac{R^3 F}{GJ}$$

From Roark and Young 1975  
Item 4, Table 20, page 290

$$J = \left( \frac{b}{2} \right) \left( \frac{t}{2} \right)^3 \left[ \frac{16}{3} - 3.36 \left( \frac{t/2}{b/2} \right) \left( 1 - \frac{(t/2)^4}{12(b/2)^4} \right) \right]$$

$$J = 0.1 \times 0.05^3 \left[ \frac{16}{3} - 3.36 \left( \frac{0.05}{0.1} \right) \left( 1 - \frac{0.05^4}{12 \times 0.1^4} \right) \right]$$

$$J = 0.000045776$$

# Software Verification

PROGRAM NAME: SAP2000  
REVISION NO.: 0

$$\Delta_z = \frac{\pi \times 4.22^3 \times 1}{4 \times 10,000,000 \times \left(\frac{0.2 \times 0.1^3}{12}\right)} + \frac{\pi \times 4.22}{2 \times 4,000,000 \times \left(\frac{5}{6} \times 0.1 \times 0.2\right)} + \left(\frac{3\pi}{4} - 2\right) \frac{4.22^3 \times 1}{4,000,000 \times 0.000045776}$$

$$\Delta_z = 0.354143 + 0.000099 + 0.146193$$

$$\Delta_z = 0.500435 \text{ in}$$